回路システム学第二(9)

2019.6.17

担当教官　山尾 泰

先週の学習項目

1. 2ポート回路の入出力インピーダンス

2. 伝送減衰量(dB)

3. 回路網関数・2ポート回路の応用

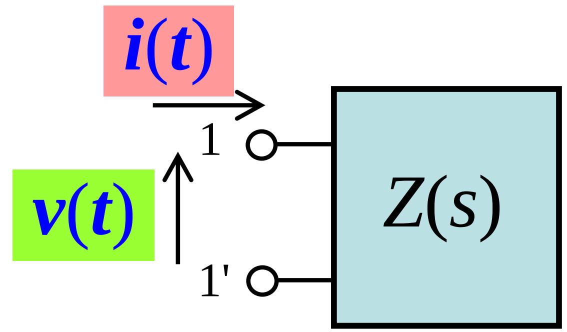
   - フィルタ

回路網関数の性質

回路網の入力インピーダンス

1ポート回路

$$Z(s)=\frac{V(s)}{I(s)}$$

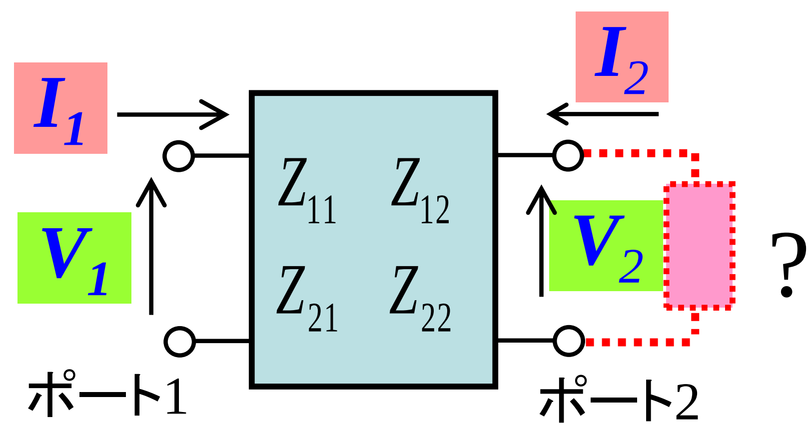


入力インピーダンス＝駆動点インピーダンス Z

2ポート回路

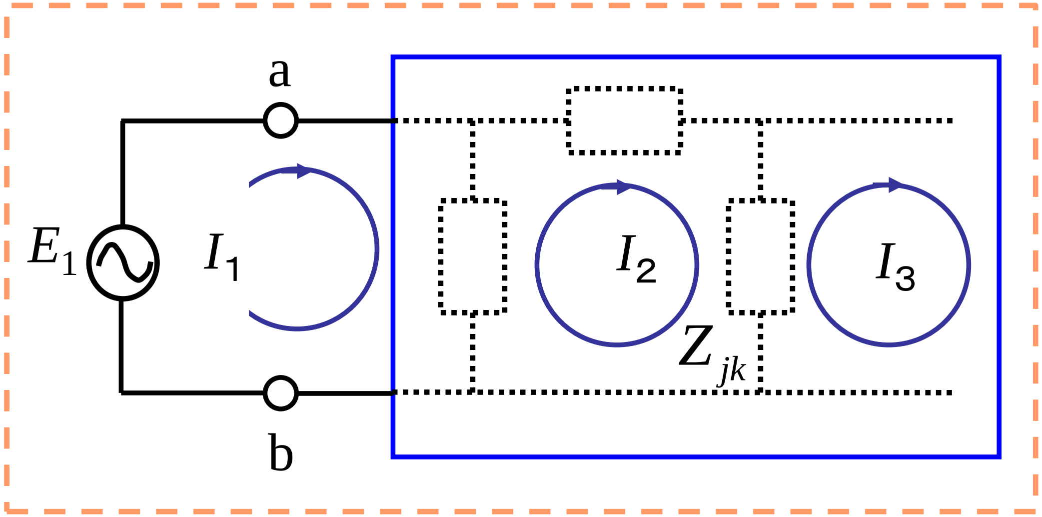
Z 行列

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}\right\}$$



V_1 と I_1 の比はポート2に接続される素子に依存

回路網の入力インピーダンスの一般化



閉路解析法(基礎電気回路)

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & & \\ & & & \\ Z_{n1} & & & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

インピーダンス行列
（正方行列）

端子a, bから右側を見たインピーダンス　Z　は

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} E_1 \qquad \therefore \qquad Z = \frac{E_1}{I_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

（クラーメルの解法）

Δ : インピーダンス行列の行列式の値

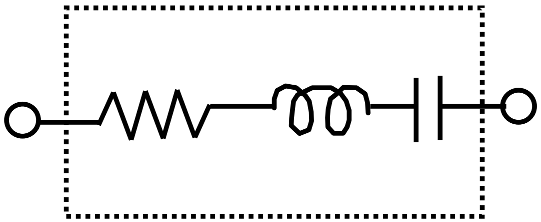
Δ_{11} : インピーダンス行列の第１行と第１列を除いた小行列式の値

RLC回路網関数の基本的性質

$$Z = \frac{E_1}{I_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & & & \\ Z_{n1} & Z_{n2} & & Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}}$$

RLC回路

Z_{jk}



$$Z_{jk} = sL_{jk} + R_{jk} + \frac{1}{sC_{jk}}$$

$$= \frac{1}{s}\left(L_{jk}s^2 + R_{jk}s + \frac{1}{C_{jk}} \right)$$

行列式の値

$$\Delta = \frac{1}{s^n}\left(a_0 + a_1 s + \cdots + a_{2n} s^{2n} \right)$$ 最高次数: n

$$\Delta_{11} = \frac{1}{s^{n-1}}\left(b_1 + b_2 s + \cdots + b_{2n-1} s^{2n-2} \right)$$ 最高次数: n-1

RLC回路網関数の満たす性質

$$Z(s)=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}=\frac{a_0+a_1s+\cdots+a_{2n}s^{2n}}{b_1s+b_2s^2+\cdots+b_{2n-1}s^{2n-1}}$$

$$s=\sigma+j\omega$$

L_{jk}, R_{jk}, C_{jk} は全て正の実数とすると

分子のS関数の係数 $a_0, a_1, \cdots, a_{2n}$ は全て正の実数

分母のS関数の係数 $b_1, b_2, \cdots, b_{2n-1}$ も全て正の実数

$Z(s)$ の分母分子の次数は $\begin{cases} (1)\text{分子が一次高い} \\ (2)\text{等しい} \\ (3)\text{分子が一次低い} \end{cases}$ の何れかである。

$Z(s)$ は**正実関数** $\begin{cases} \sigma>0\ \text{のとき}\ Z(s)\ \text{の実部は常に正} \\ \sigma=0\ \text{のとき}\ Z(j\omega)\ \text{の実部は常に零または正} \end{cases}$

正実関数の判定

$\sigma > 0$ のとき　$Z(s)$ の実部は常に正　　$s = \sigma + j\omega$

$\sigma = 0$ のとき　$Z(j\omega)$ の実部は常に零または正　　$s = j\omega$

（1）　$\dfrac{s-1}{s+1}$ ➡ $s = 0.5$ のとき $Z(s) = \dfrac{0.5-1}{0.5+1} = -0.333$ ➡ 正実関数でない

（2）　s^2 ➡ $s = j$ のとき　$s^2 = -1$ ➡ 正実関数でない

（3）　$s+2$ ➡ $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ なら $\mathrm{Re}(s+2) > 0$ ➡ 正実関数

（4）　$\dfrac{1}{s+2}$ ➡ $\dfrac{1}{\sigma + j\omega + 2} = \dfrac{1}{\sigma + 2 + j\omega} = \dfrac{(\sigma+2) - j\omega}{(\sigma+2)^2 + \omega^2}$ ➡ 正実関数

（5）　$\dfrac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+3}$ ➡ 正実関数

回路網関数の零点と極

$$Z(s)=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}=\frac{a_0+a_1s+\cdots+a_{2n}s^{2n}}{b_1s+b_2s^2+\cdots+b_{2n-1}s^{2n-1}}$$

$Z(s)=0$ となる s の値: 零点

$Z(s)=\infty$ となる s の値: 極

正弦波入力時の定常応答(交流解析)では

$$Z(j\omega)=\frac{a_0+j\omega a_1-\omega^2a_2-j\omega^3a_3+\omega^4a_4\cdots}{j\omega b_1-\omega^2b_2-j\omega^3b_3+\cdots}$$

$$=\frac{a_0-\omega^2a_2+\omega^4a_4\cdots+(-1)^n a_{2n}\omega^{2n}+j\omega\left\{a_1-\omega^2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_{2n-1}\omega^{2n-2}\right\}}{-\omega^2b_2+\omega^4b_4-\cdots+(-1)^{n-1}b_{2n-2}\omega^{2n-2}+j\omega\left\{b_1-\omega^2b_3+\cdots+(-1)^{n-1}b_{2n-1}\omega^{2n-2}\right\}}$$

$$=\frac{A_0(\omega)+jA_1(\omega)}{B_0(\omega)+jB_1(\omega)}$$

$\Rightarrow$ $Z(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$

この有理関数が既約分数の時

$A_0(\omega)+jA_1(\omega)$ $\longrightarrow$ 零であれば零点

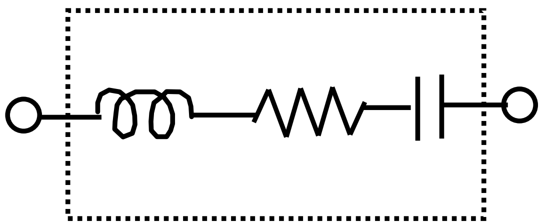
$B_0(\omega)+jB_1(\omega)$ $\longrightarrow$ 零であれば極

リアクタンス回路の周波数特性

リアクタンス回路の駆動点インピーダンス

RLC回路

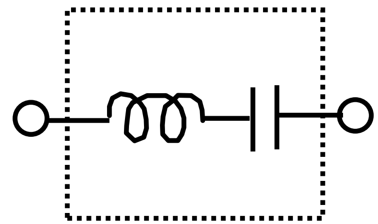
Z_{jk}



$$Z_{jk} = sL_{jk} + R_{jk} + \frac{1}{sC_{jk}}$$
$$= \frac{1}{s}\left(L_{jk}s^2 + R_{jk}s + \frac{1}{C_{jk}}\right)$$

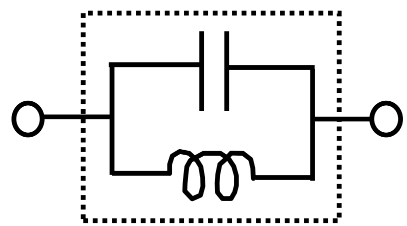
リアクタンス（LC）回路

Z_{jk}



$$Z_{jk} = sL_{jk} + \frac{1}{sC_{jk}}$$
$$= \frac{1}{s}\left(L_{jk}s^2 + \frac{1}{C_{jk}}\right)$$

Z_{jk}

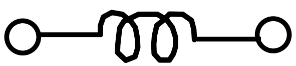


$$Z_{jk} = \frac{1}{Y_{jk}} = \frac{1}{\frac{1}{sL_{jk}} + sC_{jk}}$$
$$= \frac{s}{C_{jk}s^2 + \frac{1}{L_{jk}}}$$

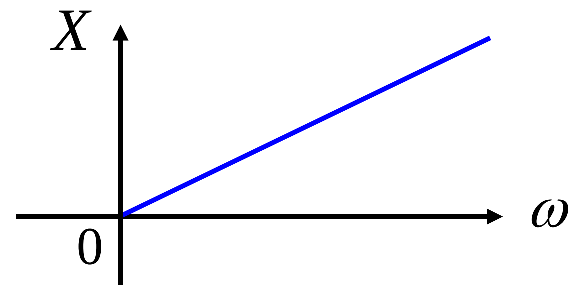
リアクタンス回路網関数の分母，分子の s の多項式は
偶数次数のみ，または奇数次数のみのいずれかで構成される

リアクタンス回路の周波数特性（1）

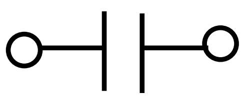
（1） インダクタ L のみ



$$X = \omega L$$

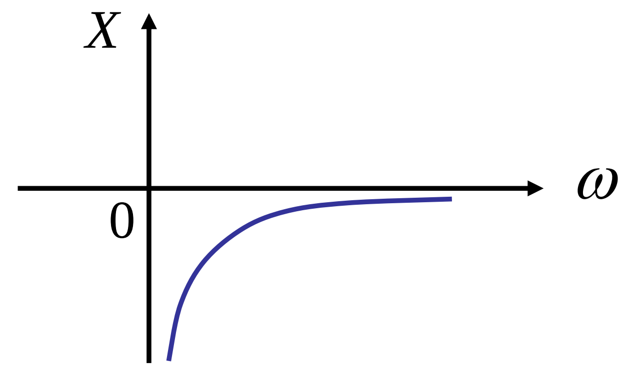


（2） キャパシタ C のみ

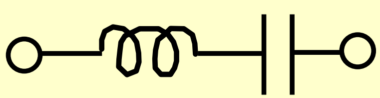


$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$X = -\frac{1}{\omega C}$$

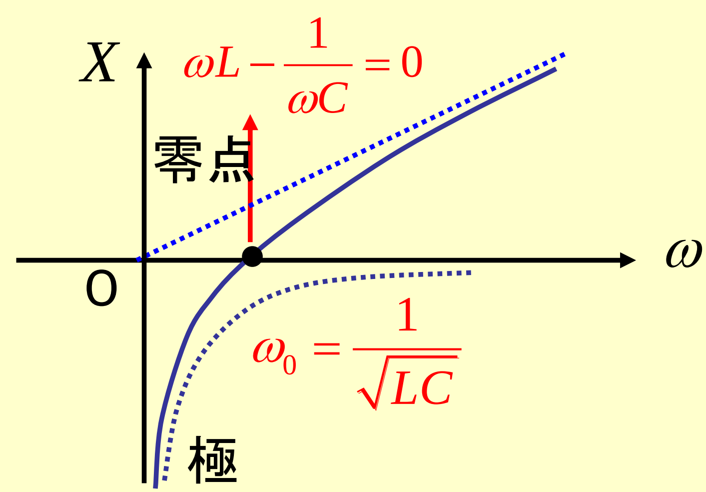


（3） L と C の直列回路



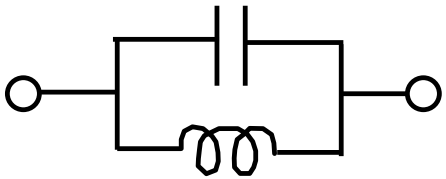
$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

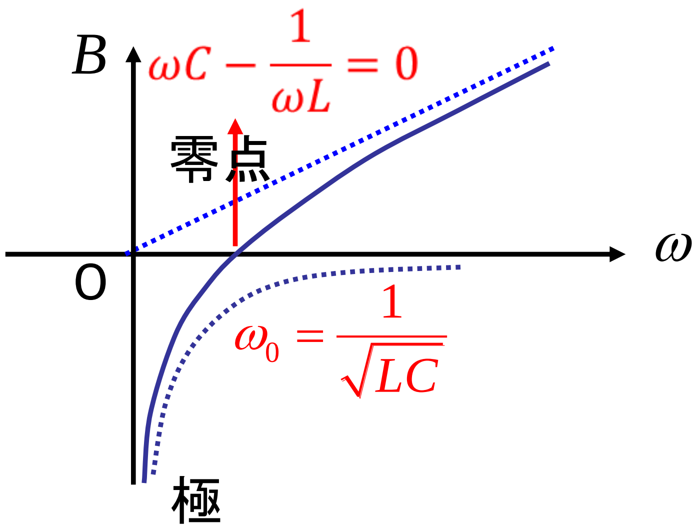
$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



リアクタンス回路の周波数特性(2)

（4） L と C の並列回路





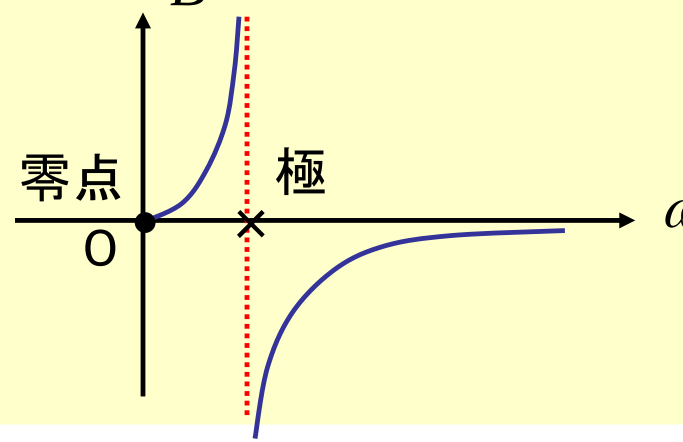
$$Y = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = j\left(\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\right)$$

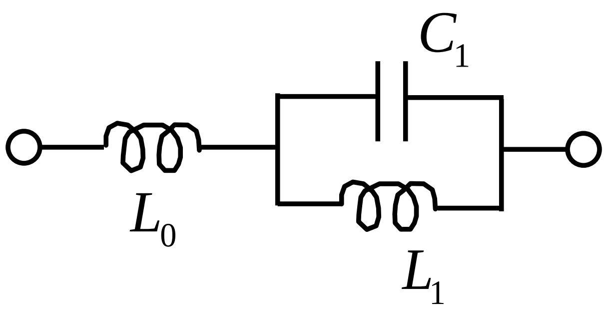
$$X = \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} = -\frac{1}{B}$$

$$X = -\frac{1}{B}$$

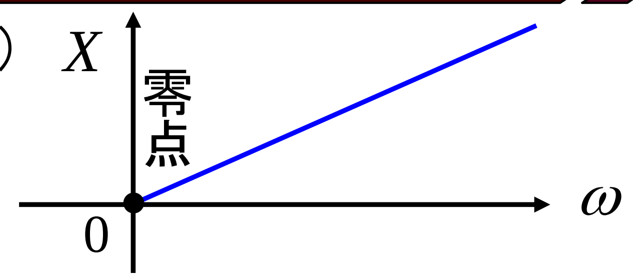


リアクタンス回路の周波数特性(3)

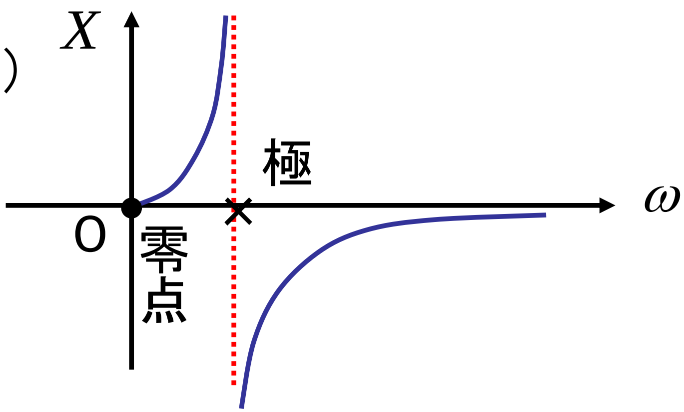
(5)前ページ(1)と(4)の直列回路



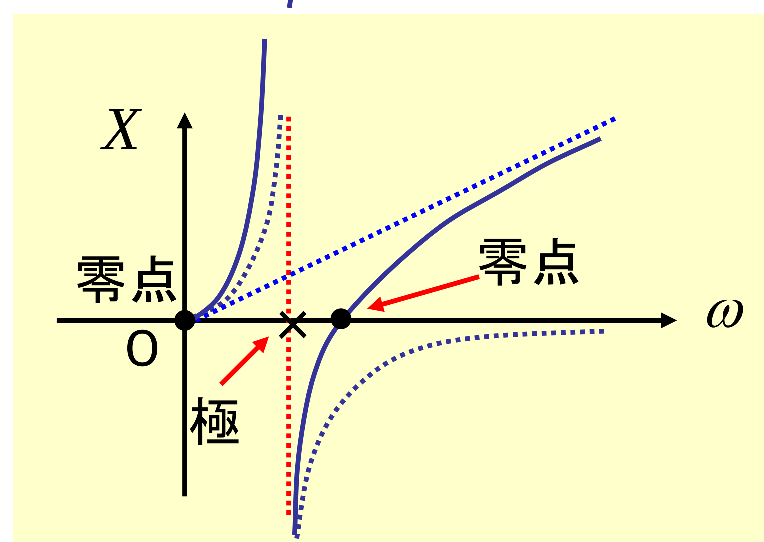
(1)



(4)



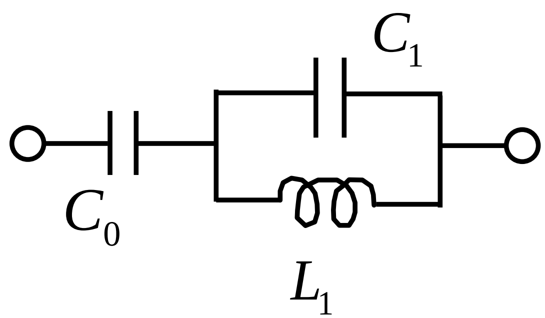
インピーダンスは(1)と(4)の和



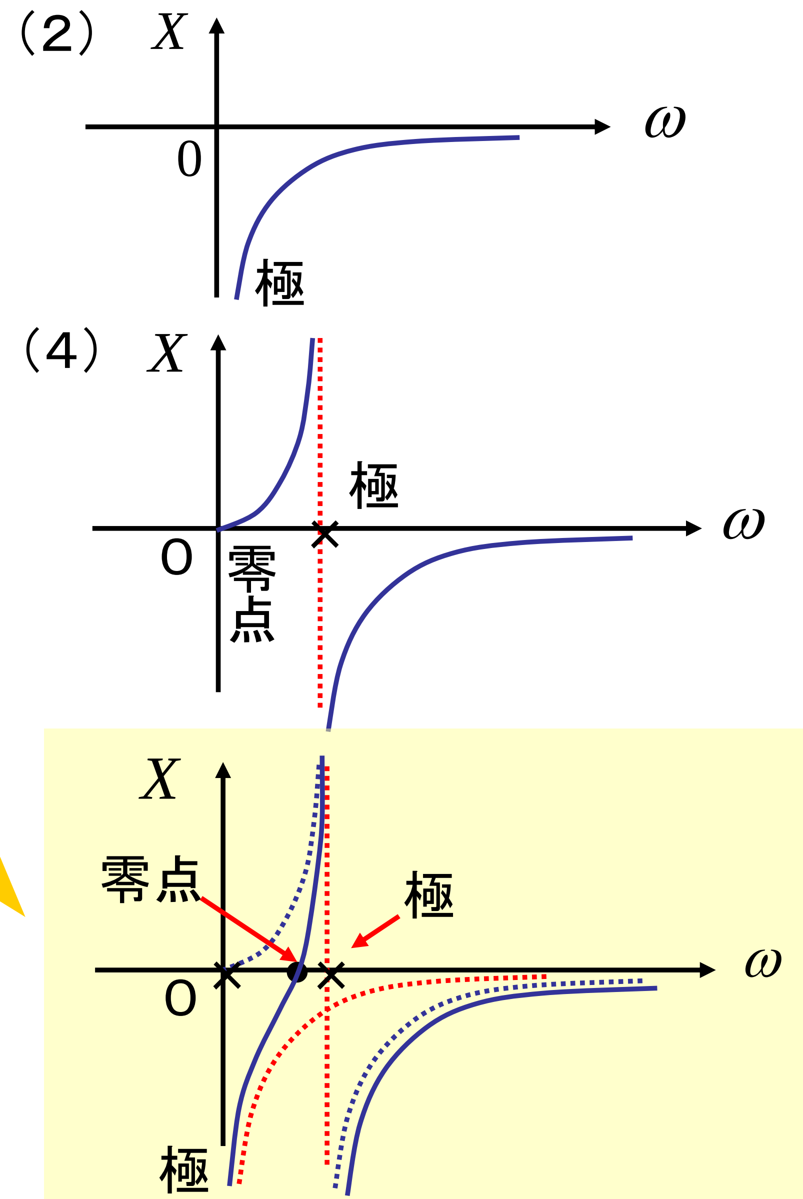
LC並列回路の極に加えて、
高い周波数に零点ができる

リアクタンス回路の周波数特性(4)

(6)前ページ(2)と(4)の直列回路



インピーダンスは(2)と(4)の和



LC並列回路の極に加えて、
低い周波数に零点ができる

リアクタンス回路の零点と極の性質

（1）リアクタンス回路のインピーダンス関数は正実関数

$\sigma > 0$ のとき $Z(s)$ の実部は常に正なので、
s平面の右半平面（虚軸上を含まず）には零点は存在しない。

また有理関数が既約分数であれば、ある複素数が同時に零点と極になることはないので、s平面の右半平面には極も存在しない。

（2）零点と極は周波数軸上で交互に配置される

$$Z(s) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{2n} s^{2n}}{b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_{2n-1} s^{2n-1}}$$

$$= \frac{H(s^2 + \omega_1{}^2)(s^2 + \omega_3{}^2)\cdots}{s(s^2 + \omega_2{}^2)(s^2 + \omega_4{}^2)\cdots}$$

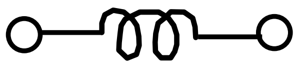
ただし $H > 0$

$0 \le \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 \cdots < \infty$

回路網関数の性質(2)

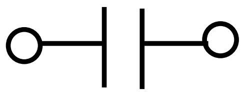
リアクタンス回路網関数の周波数微分係数

（I） インダクタ L のみ



$$X_L = \omega L \quad \Rightarrow \quad \frac{dX_L}{d\omega} = L > 0$$

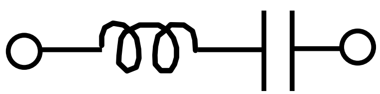
（II） キャパシタ C のみ



$$Z = \frac{1}{j\omega C} = -j\left(\frac{1}{\omega C}\right)$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dX_C}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2 C} > 0$$

（III） L と C との直列接続の場合

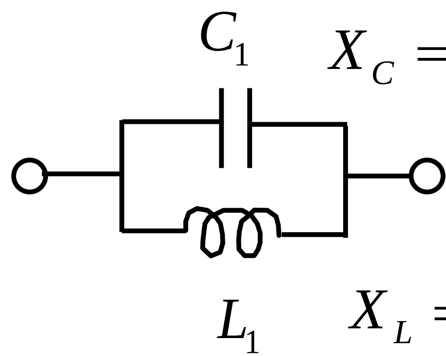


$$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \frac{dX}{d\omega} = \frac{dX_L}{d\omega} + \frac{dX_C}{d\omega} > 0$$

リアクタンス回路網関数の周波数微分係数

（IV） LとCとの並列接続の場合



$$\left.\begin{array}{l} X_C = -\dfrac{1}{\omega C} \\ \\ X_L = \omega L \end{array}\right\} X = \frac{X_C X_L}{X_C + X_L}$$

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{dX}{dX_C} \cdot \frac{dX_C}{d\omega} + \frac{dX}{dX_L} \cdot \frac{dX_L}{d\omega}$$

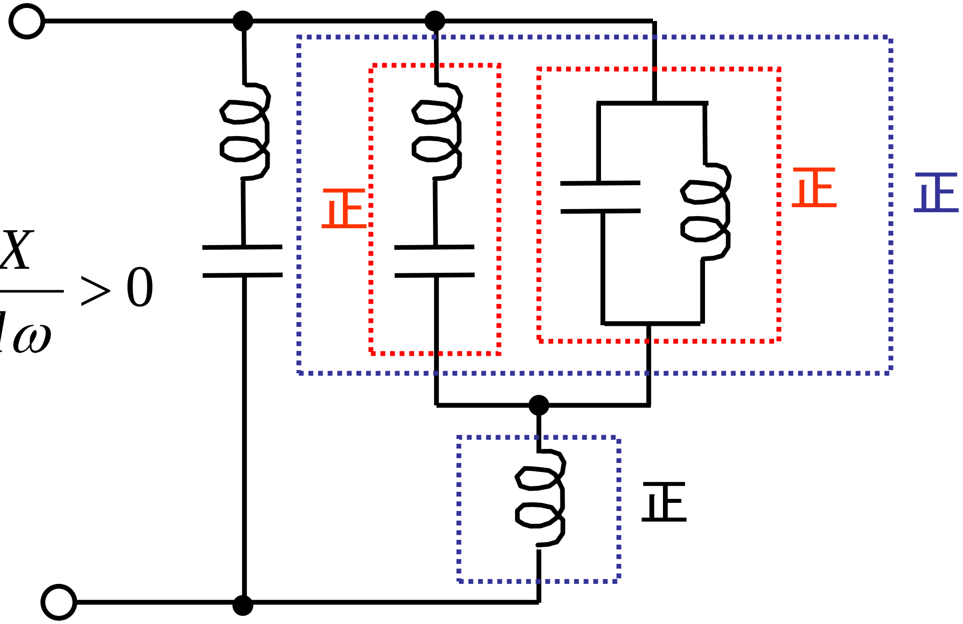
$$= \frac{X_L\left(X_C + X_L\right) - X_C X_L}{\left(X_C + X_L\right)^2} \cdot \frac{dX_C}{d\omega} + \frac{X_C\left(X_C + X_L\right) - X_C X_L}{\left(X_C + X_L\right)^2} \cdot \frac{dX_L}{d\omega}$$

$$= \frac{X_L^2 \dfrac{dX_C}{d\omega} + X_C^2 \dfrac{dX_L}{d\omega}}{\left(X_C + X_L\right)^2} > 0$$

この回路の周波数微分係数も正

任意のリアクタンス回路の周波数微分は常に正

$$\frac{dX}{d\omega} > 0$$



$$\frac{dX}{d\omega} = \left.\frac{dZ(s)}{d\omega}\right|_{s=j\omega} > 0$$

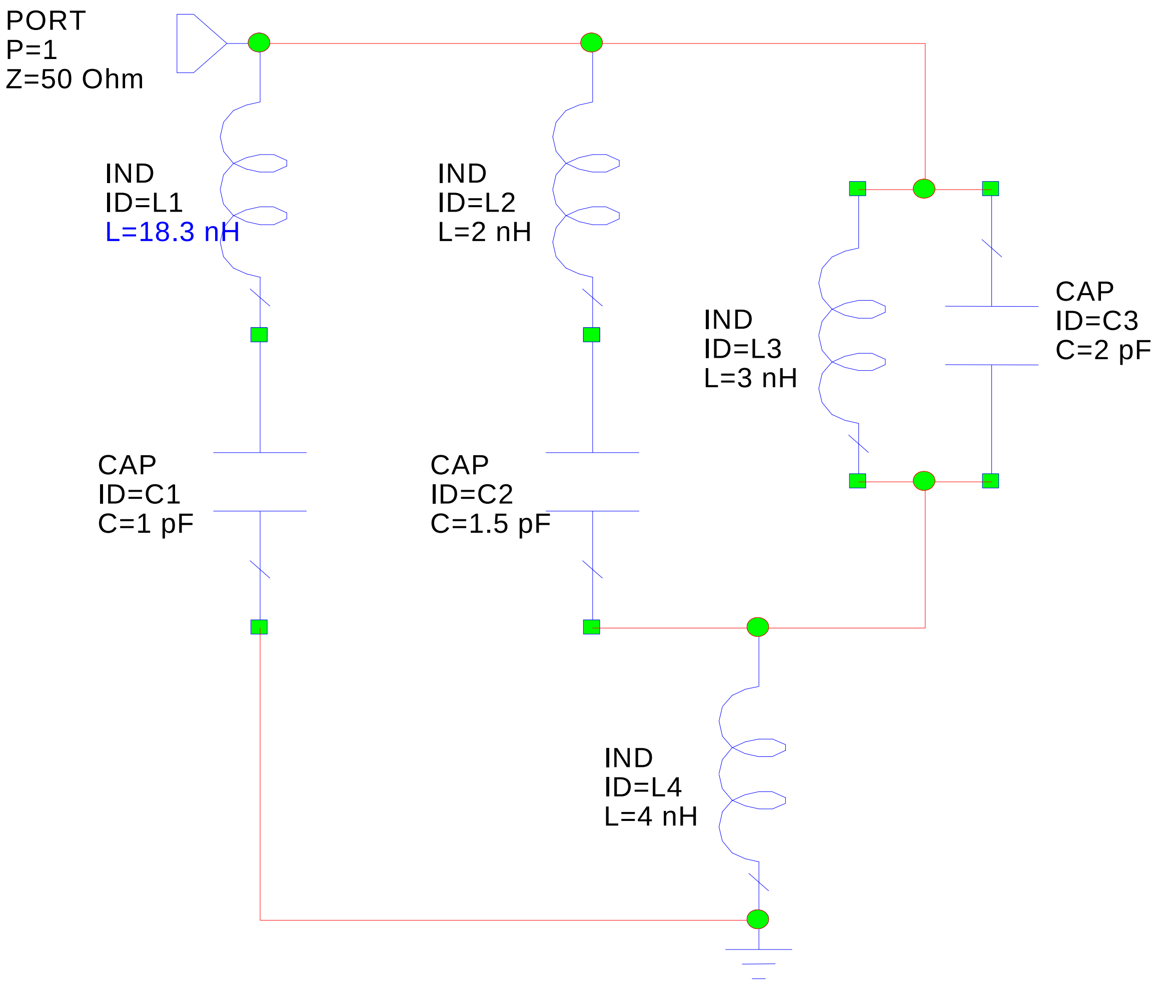
$$Z(s) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{a_0 + a_2 s^2 + a_4 s^4 + \cdots + a_{2n} s^{2n}}{b_1 s + b_3 s^3 + b_5 s^5 \cdots + b_{2n-1} s^{2n-1}} = \frac{H\left(s^2+\omega_1^2\right)\left(s^2+\omega_3^2\right)\cdots\left(s^2+\omega_{2n-1}^2\right)}{s\left(s^2+\omega_2^2\right)\left(s^2+\omega_4^2\right)\cdots\left(s^2+\omega_{2n-2}^2\right)}$$

（1） $Z(s)$はsの正の実係数の有理関数

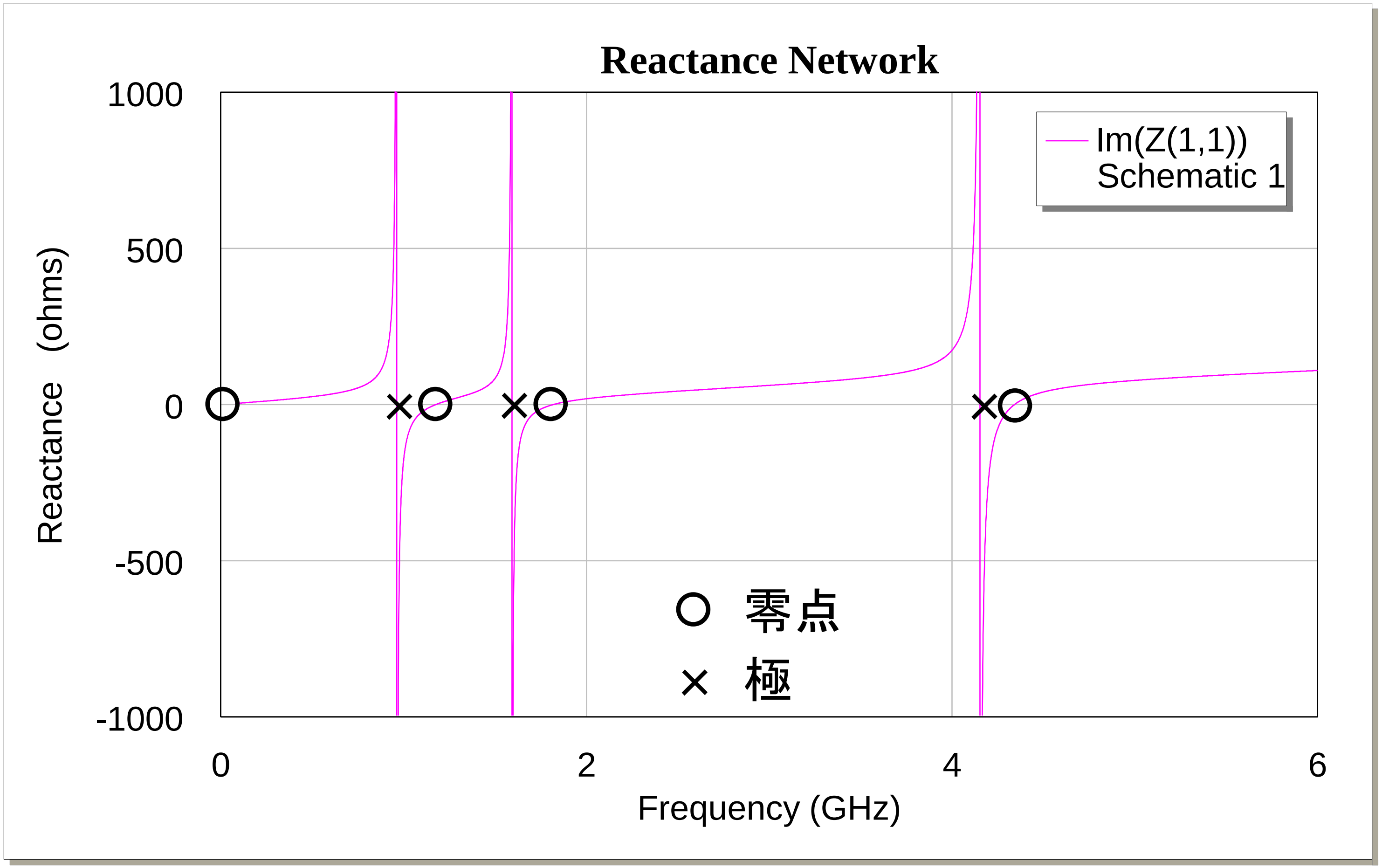
（2） $Z(s)$の極と零点は単純根（重根でない）で虚軸上に交互に存在

（3） $\left.dZ(s)/ds\right|_{s=j\omega}$ は正の実数

回路シミュレータによる計算例



回路シミュレータによる計算結果



リアクタンス回路網では $\dfrac{dX}{d\omega} > 0$ なので零点と極が交互に現れる